Fehlerkorrekturverfahren mit Walsh-Funktionen

Dieter Zimmermann DL2RR

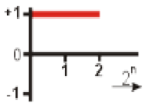
Bereits bei der Betriebsart MT63 [1] setze Pavel Jalocha SP9VRC Walshfunktionen für die Fehlerkorrektur ein. Auch in seinem neuestem neuesten Programm 'Olivia' griff er auf diese bewährten Methode zur Korrektur von Übertragungsfehlern zurück [2].
Zusätzliche Bitverzahnung (engl. Bit interleaving) (darüber wurde bereits ausführlich berichtet [3]) erhöht die Fehlerbeseitigung und eine **Bitverwürfelung (engl. scrambling)** verändert das Spektrum des Nutzsignals so, dass einerseits die Bandbreite um ein Vielfaches ansteigt aber im Gegenzug auch die Signalamplitude um genau dieses Vielfache reduziert wird. Je größer die Bandbreite gespreizt wird, umso größer wird auch die Amplitude gedämpft! Das kann bei großen Bandspreizungen so weit gehen, dass die Amplitude unterhalb des Stör- bzw. Rauschpegels fällt. Da die Bandspreizung erfolgt durch Multiplikation mit dem Kodewort 0xE257E6D0291574EC. Da es statistisch unabhängig zu anderen Signalen bzw. dem Rauschen im selben Frequenzbereich ist, kann das gespreizte Nutzsignal wieder aus den überlagerten Störsignalen heraus gefiltert werden
Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Betriebsarten besteht bei der Übertragung (Aussendung) der Daten. Bei MT63 werden diese über die gesamte Bandbreite von 1000Hz[1] auf 63 Kanäle verteilt und per DBPSK-Modulation ausgesendet, während sie bei Olivia in einem von 32 Kanälen[1] innerhalb der gleichen Bandbreite konzentriert sind und per MFSK-Modulation gesendet werden.

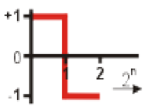
Die Walshfunktion

Walshfunktionen [4] sind nichtharmonische Funktionen mit den Zuständen +1 und -1, der Ausgangszustand ist immer +1. Um Eingangssignale zu beschreiben, werden endlich viele Walshfunktionen über das zu approximierende Signal gelegt.

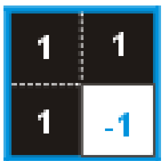
Walshfunktionen haben folgende Eigenschaften :
- **sie sind orthogonal,**
- **sie sind reziprok zu sich selbst,**
- **die Summe der Produkte der einzelnen Koeffizienten zweier Funktionen ergeben immer Null,**
- **bei jeder Funktion ist die Anzahl der positiven Werte gleich der negativen, ausgenommen bei der ersten.**
- **die Variablen können vertauscht werden**
- **das Produkt zweier Walshfunktionen ergibt eine neue Walshfunktion,**
- **die erlaubten Zuständen der Koeffizienten sind ausschliesslich +1 oder -1,**
- **der Anfangszustand ist immer +1.**

Eine Walsh-Matrix [4] [5] ist eine quadratische Matrize mit den Abmessungen 2^n. Man kann sie aus einer Hadamard-Matrix [6] mit gleicher Abmessung erhalten, deren Reihen gegenseitig orthogonal sind. Die Reihen sind so anzuordnen, dass die Anzahl von Zustands-



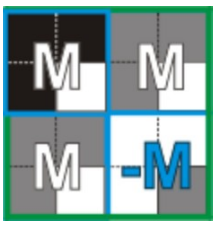


änderungen zunimmt. Jede Reihe einer Walsh-Matrix entspricht einer Walsh-Funktion. Die kleinste Matrix erhalten wir bei einer Länge von n=1 (2^n=2), bestehend aus 2 Reihen und 2 Spalten.

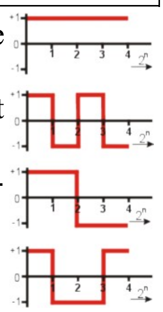


Matrix 2x2

Ersetzt man in einer Matrix die 1er-Felder durch diese Minimalmatrix 'M' und die -1er-Felder durch die inverse Minimalmatrix '-M', bekommt man eine Walsh-Matrix mit der doppelten Anzahl von Reihen und Spalten. Auf diese Weise lässt sich sehr einfach eine Walsh-Matrix beliebiger Grösse erzeugen. Eine so erzeugten Matrix nennt man 'natürliche' bzw. 'Hadamard-Matrix' [6]. Das 'Puls-diagramm' zu dieser Matrix sieht dann entsprechend der Zeichnung rechts aus: Durch eine weitere Verdopplung erhalten wir die 8x8-Matrix für das folgende Beispiel und letztlich erhalten wir durch noch mehr Substitutionen die 64x64-Matrix, die in Olivia verwendet wird.



4x4-Matrix



Die Walsh-Hadamard-Transformation

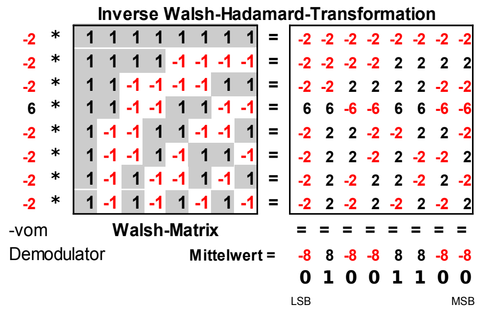
Bei der Walsh-Hadamard-Transformation [7] wird jedes Bit des zu übertragenden n-Bit lange Datenwortes mit der n-ten Walsh-Funktion einer Walch-Matrix (hier die 'sequenzielle' Form) der Länge 2^n multipliziert. Das Ergenis sind n Schlüsselworte, die aus n Bits bestehe. Jedes Bit erstellt also ein eigenes Schlüsselwort, das ihm eindeutig zugewiesen ist und zum Empfänger gesendet wird. Für

Walsh-Hadamard-Transformation / Schlüsselworte

	Datum			Walsh-Matrix									Schlüsselworte							
LSB	0	-1	*	1	1	1	1	1	1	1	1	=	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	1	1	*	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	=	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
	0	-1	*	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	=	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
	0	-1	*	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	=	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
	1	1	*	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	=	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	1	1	*	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	=	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
	0	-1	*	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	=	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
MSB	0	-1	*	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	=	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
													=	=	=	=	=	=	=	=
Quersumme													-2	-2	-2	6	-2	-2	-2	-2

1 Standardwert im Vorgabemodus (default)

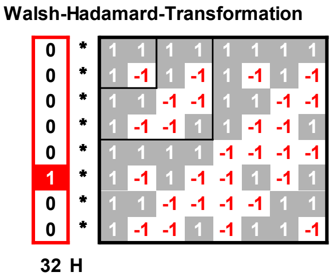
dieses Beispile wurde n=3 gewählt. Die Multipliktion des 8-Bit-Datenwort mit der 8x8-Matrix ergibt somit acht Schlüsselworte. Die vertikale Quersumme für jede Kolonne wird dem Modulator zur Weiterverarbeitung (MFSK) und letztlich zum Aussenden übergeben.



Im Empfänger wird das MFSK-Signal demoduliert und die empfangene Quersumme durch eine inverse Walsh-Hadamard-Transformation, d.h. durch erneute Multiplikation mit den gleichen Walsh-Funktionen, zurück transformiert. Der Mittelwert der gleichwertigen Bits aller Reihen dieser Matrize (vertikale Quersumme) ergibt das ursprüngliche Datenwort. Auf dem Übertragungsweg enstandene Bitfehler werden so auf einfache Weise ausgemittelt.

Das Fehlerkorrekturverfahren

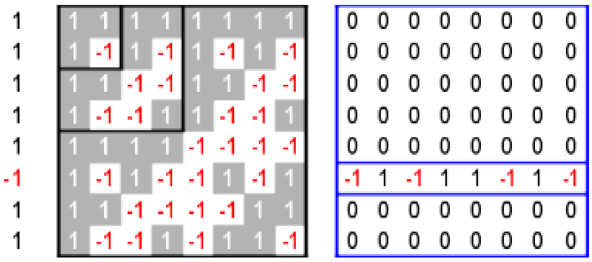
Beim Olivia-Übertragungssystems wird mit der Walsh-Hadamard-Transformation eine Kode-Tabelle erzeugt, in dem jedem der 128 Zeichen des ASCII-Zeichensatzes eine der 64 möglichen Walsh-Funktion bzw. deren Kehrwert als ein 64 Bit langes Kodewort zugewiesen wird. Dafür wird eine Walsh-Matrix in 'natürlicher' oder Hadamard-Anordnung verwendet. Alternativ gibt es die zweistellige (dyadic) oder Paley-Anordnung [7], deren Reihen sich auf den Gray-Kode [8] beziehen.



Um das Verfahren übersichtlicher zu gestalten, werden gegenüber der Lösung bei Olivia [9] ein paar Vereinfachungen getroffen. Anstelle von 64-Bit-Vektoren wird die Übertragung von 8-Bit-Datenwörtern an Hand einer 8x8-Bit-Matrix gezeigt. Der Zeichenvorrat wird so zwar auf 16 Zeichen beschränkt, aber dafür lassen sich die Vorgänge übersichtlicher nachvollziehen. Die Eingangsdaten liegen im 1aus8-Kode vor, d.h. jedes Zeichen ist 8 Bit lang und nur ein Bit hat den Wert 1.

Der Sender

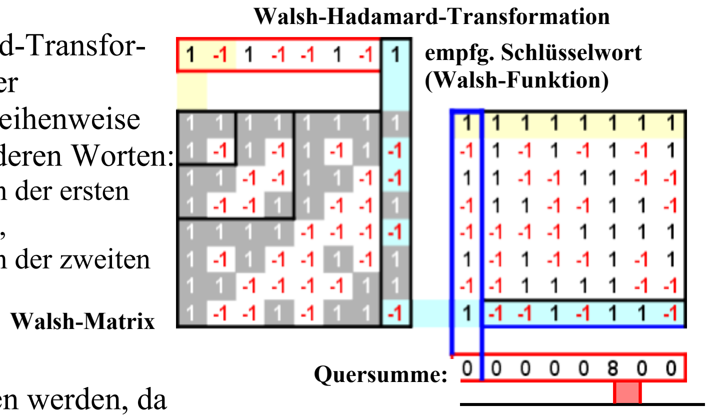
In unserem Fall wollen wir das 6. Zeichen (32. = 20H = 0010 0000) übertragen. Jedes der acht Bits zeigt auf eine Walsh-Funktion der Matrix, aber nur die dem '1'-Bit zugeordnete wird für die Übertragung weiterverarbeitet. Zwangsläufig ist das Schlüsselwort mit der Walsh-Funktion identisch, da es sich um eine Multiplikation mit +1 handelt. Wir können so acht Zeichen (0...7) verschlüsseln und weitere acht, indem wir den negativen Werten (siehe Abbildung) die Zeichen 8 ... 15 zuordnen. Die acht Bits der Schlüsselwörter bzw. der Walsh-Funktion kennzeichnen eindeutig das zu übertragende Bit und stellen darüber hinaus eine achtfache Redundanz zur Fehlerkorrektur dar und werden mit denen des restlichen Datenstromes verknüpft.



Der Empfänger

Im Demodulator wird wiederum eine Walsh-Hadamard-Transformation durchgeführt, d.h. es wird wieder jede Stelle der empfangenen Walsh-Funktion mit der Walsh-Matrix reihenweise multipliziert und dann stellenweise aufaddiert. Mit anderen Worten:

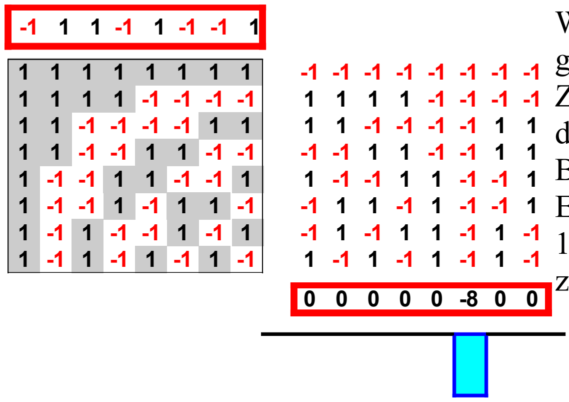
- ➔ die 1. Stelle des Schlüsselwortes wird mit alle Stellen der ersten Zeile (oder Spalte) der Walsh-Matrix multipliziert,
- ➔ die 2. Stelle des Schlüsselwortes wird mit alle Stellen der zweiten Zeile (oder Spalte) multipliziert,
- ➔ usw. bis zur 8. Stelle des Schlüsselwortes.
- ➔ Von jeder Spalte wird die Summe gebildet.



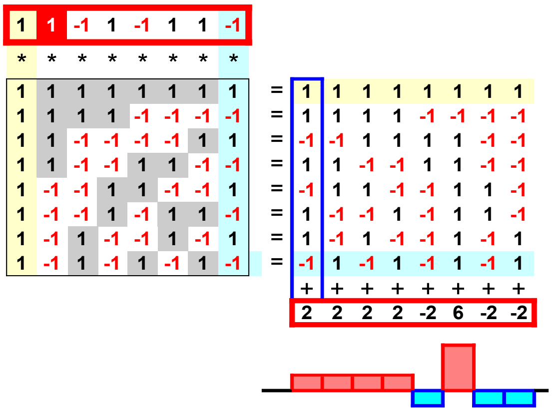
Es bleibt sich gleich, ob Zeilen oder Spalten genommen werden, da diese identisch sind!

Die senkrechte Quersumme jeder Stelle aller Zeilen liefert das Ergebnis. Der Kanlal mit der grössten Leistung wird auf ;logisch Eins' gesetzt, alle anderen auf 'logisch Null'. Unter Berücksichtigung der Reihenfolge (MSB ist hier rechts!) erhalten wir das gesendete Datenwort 0010 0000 = 20H bzw. 32.

Empfang des erweiterten Zeichensatzes



Wenn wir einen negativen Puls erhalten dann wurde ein Zeichen gesendet, das grösser als 8 ist. Auf diese Weise kann die doppelte Zeichen-Menge bei gleicher Signallänge übertagen werden. In diesem Bild empfangen wir das Schlüsselwort aus dem früherem Beispiel und sehen, dass die Dekodierung eindeutig das richtige Ergebnis liefert. Wir haben ein Zeichen mit dem Kode 1101 1111 empfangen, dem wir vereinbarungsbemäss den Wert 13 zuweisen.



Empfang gestörter Stignale

Angenommen, auf dem Übertragungsweg sei das 2. Bit durch Rauschen, QRM, oder QSB 'umgedreht worden. Diese Störung verteilt sich nach der Transformation gleichmässig auf alle Stellen des Endergebnisses, so dass der 6. Kanal immer noch eindeutig die grösste Leistung aufweist und damit auf logisch **1** bleibt

Übertragung von Datenströmen

In der Praxis haben wir es jedoch nicht (nur) mit der Übertragung einzelner Zeichen zu tun, sondern um längere Textpassagen oder sonstige Daten, also mit Datenströmen. Fehler durch anhaltende Rauscheinbrüche, Bündelstörungen oder Fading lassen sich ausreichend gut beseitigen, solange die Dauer der Störung unterhalb einer bestimmten Länge liegt. Die einzelnen Bits des Datenstromes werden durch Verwürfelung (scrambling) und einfache Bitverzahnung (nterleaving) zeitlich versetzt angeordnet, um die erzeugten Zeichenmuster zufälliger und mit minimaler Eigenkorrelation erscheinen zu lassen. Anders ausgedrückt: diese Stufe verschiebt die Bits und multipliziert sie mit Hilfe einer XOR-Verküpfung mit vordefinierten Verwürfelungs-Vektoren. Dadurch wird das resultierende Muster deutlich verstärkt, die Leistung des weissen, unkorrelierten Rauschens aber nicht, was für die Synchronisation eine großer Hilfe bedeutet.

Information

	8	4	2	1	Bit	1	2	3	4	5	6	7	9
2	0	0	1	0	Walch 1 von „2.“	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
4	0	1	0	0	Walch 2 von „4.“	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
3	0	0	1	1	Walch 3 von „3.“	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
6	0	1	1	0	Walch 4 von „6.“	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
12	1	1	0	0	Walch 5 von „12.“	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1

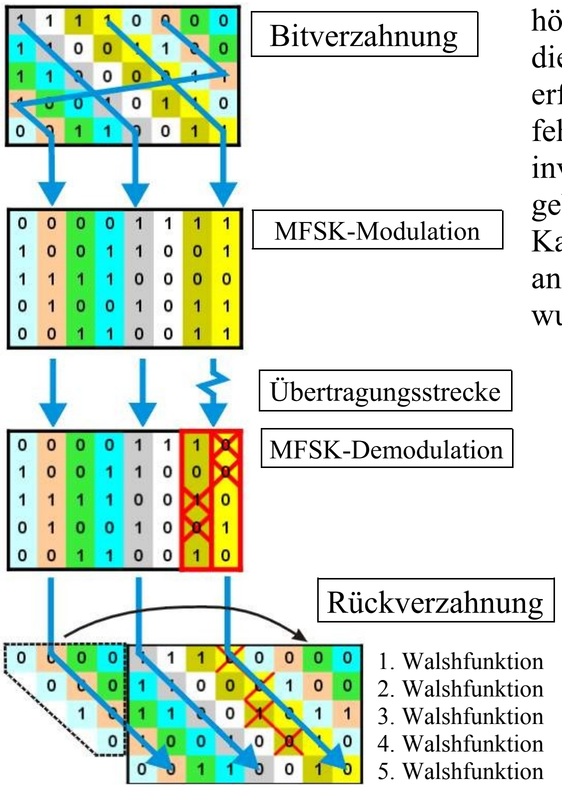
Als **Beispiel** soll eine Datenfolge von fünf Zeichen (2, 4, 3, 6 u. 12) als 4-Bit-Binärdaten übertragen werden und die Kanäle 3 und 4 wurden auf dem Übertragungsweg lt. nebenstehenden Tabellen gestört.
Jedes Zeichen wird in den 1aus8-Kode umgesetzt und über eine **sequenzielle** Walsh-Hadamard-Matrize transformiert. Wir erhalten einen aus fünf 8-Bit-Vektoren bestehenden Block. Bei der anschliessenden Bit-Verzahnung werden die Symbole um jeweils eine Stelle nach rechts verschoben und als 5-Bit-Daten dem **MFSK-Modulator** zugewiesen und als einer von 32 möglichen Tönen ausgesendet. Jeder Ton stellt also ein Symbol dar, das 5 Bit der Information trägt, 64 Symbole bilden einen Block. Innerhalb jedes Blockes wird ein Bit pro Symbol genommen und bildet einen 64-Bit-Vektor, der als eine Walsh-Funktion kodiert wird und einem 7-Bit-Zeichen des ASCII-Kodes zugeordnet ist, jeder Block enthält somit fünf Zeichen.
Der **Demodulator** misst die Amplituden aller 32 möglichen Töne (Fourier-Transformation) und da nur einer dieser 32 Kanäle einen gesendeten Ton enthalten kann, wird der mit der

Frequenz der **gesendeten** Töne

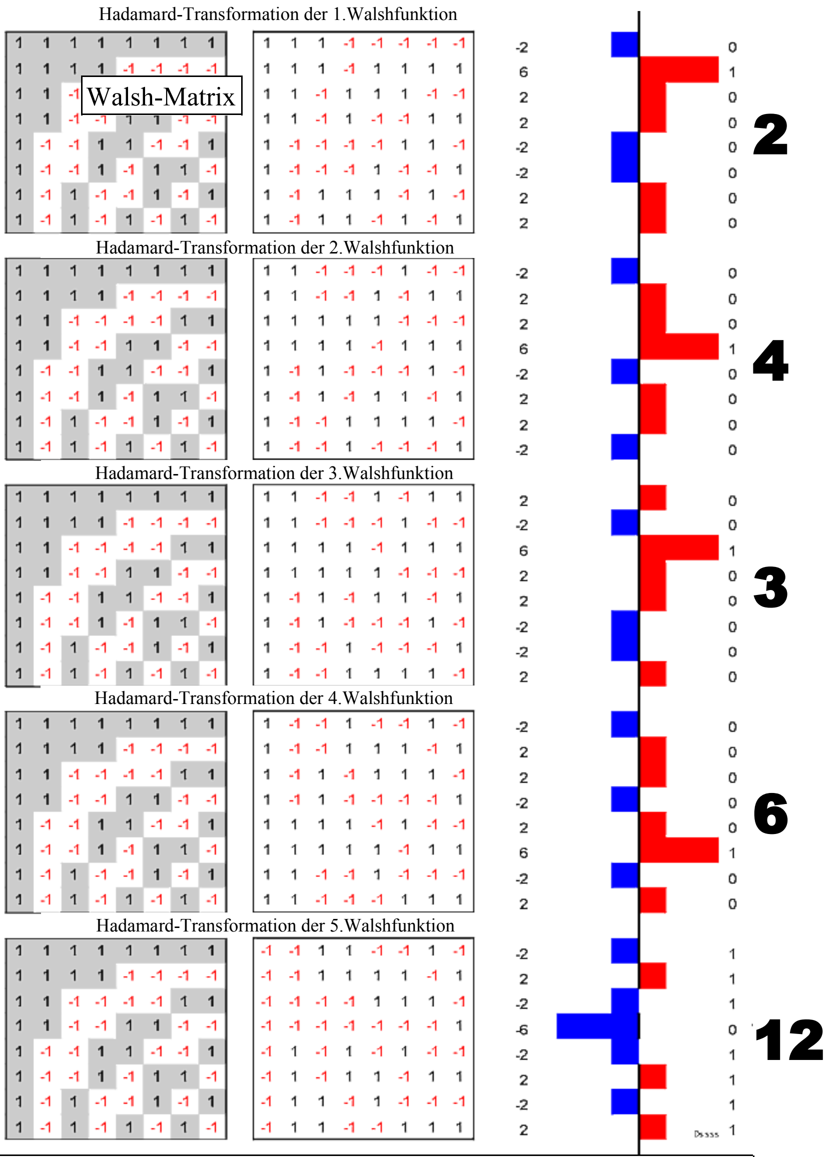
Puls	Daten	Kanal	Freqenz
0	01100	6	688 Hz
1	00110	12	675 Hz
2	00101	20	1125 Hz
3	01101	22	1188 Hz
4	11010	11	844 Hz
5	10000	1	531 Hz
6	10011	25	1281 Hz
7	11011	27	1344 Hz

Frequenz der **empfangenen** Töne

Puls	Daten	Kanal	Freqenz
0	01100	6	688 Hz
1	00110	12	675 Hz
2	00101	20	1125 Hz
3	01101	22	1188 Hz
4	11010	11	844 Hz
5	10000	1	531 Hz
6	10101	21	1281 Hz
7	00010	8	1344 Hz



höchsten Amplitude aus dem Spektrum geholt. Bei der Dekodierung geschieht das gleiche in umgekehrter Reihenfolge. Nach erfolgter Rückverzahnung erhalten wir eine entsprechend fehlerhafte Matrix. Für jedes der fünf Symbole werden durch inverse Walsh-Hadamard-Transformation die Walsh-Funktionen gebildet und deren Quersumme errechnet. Auch hier wird dem Kanal mit der grössten Leistung die 'logische Eins' und allen anderen eine 'logische Null' zugewiesen. Die Übertragungsfehler wurden so wieder korrigiert.



[1] **MT63:** „http://de.wikipedia.org/wiki/MT63“
[2] **OLIVIA:** „http://www.darc.de/p31/Olivia.pdf“
[3] **FEC:** „http://www.darc.de/p31/seminare/FEC.PDF“
[4] **Walsh-Funktion:** „http://de.wikipedia.org/wiki/Walsh-Funktion.htm“
[5] **Walsh-Funktion:** „http://mathworld.wolfram.com/WalshFunction.html“
[6] **Hadamard-Matrix:** „http://mathworld.wolfram.com/HadamardMatrix.html“
[7] Hadamard-Transformation: „http://en.wikipedia.org/wiki/Hadamard_transform“
[8] **Gray Code :** „http://mathworld.wolfram.com/GrayCode.html“
[9] **Forward Error-Correcting coding with Hadamard Transform:** „http://homepage.sunrise.ch/mysunrise/jalocha/fht_coding.htm“
[10] **64-Bit-Matrix:** Beispiel als „OpenOffice.org Calc“-Dokument mit allen Berechnungen auf Anfrage unter (dl2rr@darc.de) abrufbar.